Chapitre 3

Variables aléatoires

Sommaire

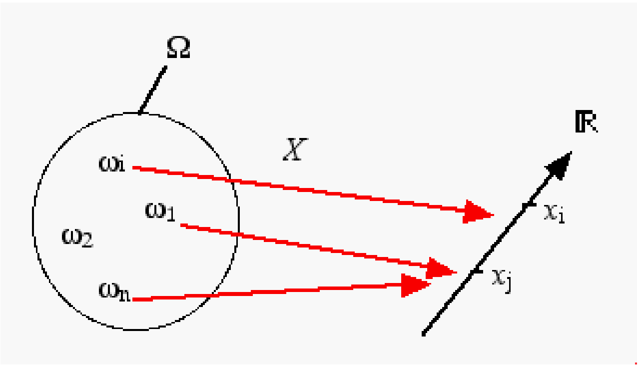
1. Introduction

Dans la plupart des **phénomènes aléatoires**, le résultat d'une **épreuve** peut se traduire par une « grandeur » mathématique, très souvent représentée par un nombre entier ou un nombre réel. La notion mathématique qui représente efficacement ce genre de situation concrète est celle de **variable aléatoire** (notée également v.a.). Ainsi le temps de désintégration d'un atome radioactif, le pourcentage de réponses « oui » à une question posée dans un sondage ou le nombre d'enfants d'un couple sont des exemples de variables aléatoires.

Remarque : On se limitera ici au cas des variables aléatoires **réelles** (les entiers faisant bien sûr partie des réels).

Etant donné un **espace probabilisé** d'espace fondamental Ω et de mesure de probabilité P, on appelle **variable aléatoire** sur cet espace, toute **application** X de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$X: \quad \varepsilon(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$\omega \to X(\omega)$$



A chaque évènement élémentaire ω de Ω correspond un nombre réel x associé à la variable aléatoire X. Comme l'indique le graphe, il n'y a pas obligatoirement autant de valeurs possibles prises par la variable aléatoire X que d'évènements élémentaires. La valeur x correspond à la **réalisation** de la variable X pour l'évènement élémentaire ω.

Exemple :

Si l'on considère la constitution d'une fratrie de deux enfants, l'espace fondamental est constitué des évènements élémentaires suivant :

$$\Omega = \{GG, GF, FG, FF\}$$

Les valeurs possibles prises par la variable aléatoire X, « nombres de fille dans la famille » sont : $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

2 Variables aléatoires discrètes

2.1 Définition

Une variable aléatoire est dite **discrète** si elle ne prend que des **valeurs discontinues** dans un intervalle donné (borné ou non borné). L'ensemble des nombres entiers est discret. En règle générale, toutes les variables qui résultent d'un **dénombrement** ou d'une **numération** sont de type discrètes.

Exemples :

Les variables aléatoires,

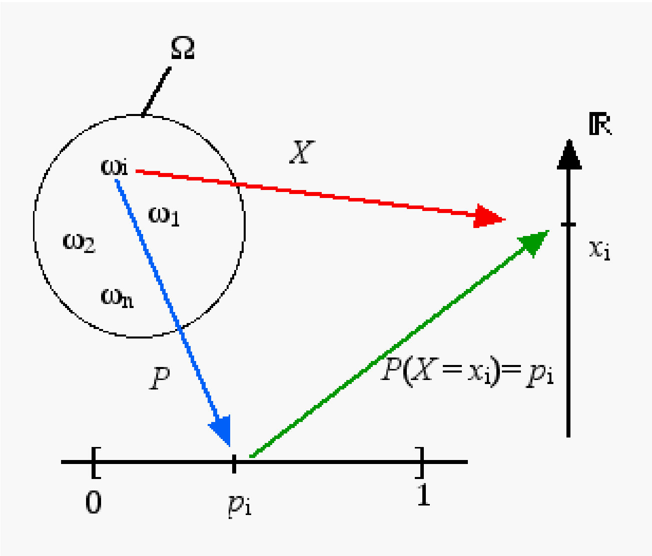
- le nombre de petits par porté pour une espèce animale donnée (chat, marmotte, etc),
- le nombre de bactéries dans 100 ml de préparation,
- le nombre de mutations dans une séquence d'ADN de 10 kb,

etc…

sont des **variables aléatoires discrètes**.

2.2 Loi de probabilité

Une variable aléatoire est caractérisée par l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre et par l'expression mathématique de la probabilité de ces valeurs. Cette expression s'appelle **la loi de probabilité** (ou **distribution de probabilité**) de la variable aléatoire.



La loi de probabilité d'une **variable aléatoire discrète** est entièrement déterminée par les probabilités p_i des évènements $\{X = x_i\}$, x_i parcourant l'univers image $X(\Omega)$. La **loi de probabilité** est donnée par les $(x_i, p_i)_i$.

Remarque : Afin de simplifier l'écriture, nous noterons pour la suite du cours :
$P(\{X = x_i\})$ équivalent à $P(X=x_i)$ ou p_i

Exemple :

Dans le cas de la constitution d'une fratrie de deux enfants, si l'on fait l'hypothèse que la probabilité d'avoir un garçon est égale à celle d'avoir une fille (1/2), alors la distribution de probabilité ou **loi de probabilité du nombre de filles** dans une fratrie de deux enfants est :

Ensemble des évènements possibles Ω	Valeurs de la variable aléatoire X	Probabilités associées à la variable X **$P(X=x_i)$ ou p_i**
G et G **F et G ou G et F** **F et F**	**0** **1** **2**	**1/4** **1/2** **1/4**

Si $P(\text{F})= P(\text{G})=1/2$, alors

(1) $P[(\text{F}\cap \text{G})\cup (\text{G}\cap \text{F})] = P(\text{F}\cap \text{G}) + P(\text{G}\cap \text{F})$ **Propriétés d'additivité**
avec $(\text{F}\cap \text{G}) \cap (\text{G}\cap \text{F})=\varnothing$ évènements incompatibles

(2) $P(\text{F}\cap \text{G})= P(\text{F})P(\text{G})$ **Propriété d'indépendance**
d'où $P[(\text{F}\cap \text{G})\cup (\text{G}\cap \text{F})]= P(X=1)= (1/2\text{x}1/2)+(1/2\text{x}1/2)=1/2$

Remarque : Une loi de probabilité n'est établie que si $\sum_i p_i = 1$, la somme étant étendue à tous les indices i.

2.3 Fonction de répartition

On appelle **fonction de répartition** d'une variable aléatoire X, la fonction F_X telle que :

$$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$t \to F_X(t) = P(X < t)$$

Concrètement la fonction de répartition correspond à la **distribution des probabilités cumulées**. Le plateau atteint par la fonction de répartition correspond à la valeur de probabilité 1 car $\sum_i p_i = 1$.

L'importance pratique de la fonction de répartition est qu'elle permet de calculer la probabilité de tout intervalle dans $\mathbb{R}$.

Les **propriétés** associées à la fonction de répartition sont les suivantes :

Soit F_X la fonction de répartition d'une **variable aléatoire discrète** X alors :

(P_1) $\forall t \in \mathbb{R} \quad 0 \le F_X(t) \le 1$

(P_2) F_X est croissante sur $\mathbb{R}$

(P_3) $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$

(P_4) si $a \le b \quad P(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$

Voici pourquoi :

(P_1) résulte de la définition d'une probabilité

(P_2) si $a \le b$, alors $\{X < a\} \subset \{X < b\}$ donc $P(X < a) \le P(X < b)$ voir **inclusion**

(P_3) même raison que pour P_1

(P_4) $\{X < b\} = \{a \le X \le b\} \cup \{X < a\}$ ainsi $F_X(b) = P(a \le X \le b) + F_X(a)$

Exemple :

On considère l'évènement ω « lancer de 3 pièces ». On introduit une variable aléatoire X définie par $X(\omega)$ « nombre de piles de l'évènement ω». La loi de probabilité de X est :

Nombre de piles	$P(X = x_i)$	F_X
0	1/8	1/8
1	3/8	4/8
2	3/8	7/8
3	1/8	1

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, on utilise un **diagramme en bâtons** pour visualiser la **distribution de probabilités** et une fonction en escalier pour **la fonction de répartition.**

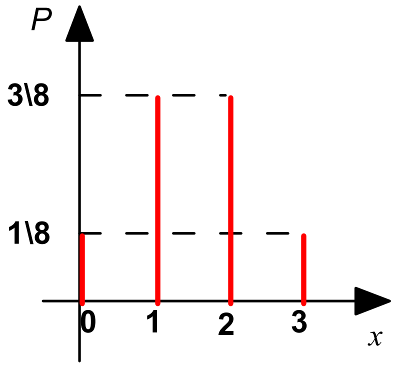
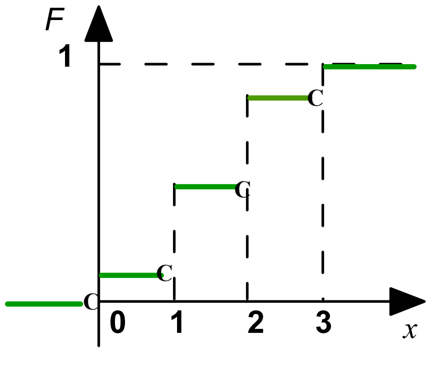


Diagramme en bâtons



Fonction de répartition

3 Variables aléatoires continues

3.1. Définition

Une variable aléatoire est dite **continue** si elle peut prendre **toutes les valeurs** dans un intervalle donné (borné ou non borné). En règle générale, toutes les variables qui résultent d'une **mesure** sont de type continu.

Exemples :

Les variables aléatoires,
- le masse corporelle des individus pour une espèce animale donnée,
- taux de glucose dans le sang,
- etc.

sont des **variables aléatoires continues**.

3.2. Fonction densité de probabilité

Dans le cas d'une **variable aléatoire continue**, la loi de probabilité associe une probabilité à chaque ensemble de valeurs définies **dans un intervalle donné**. En effet, pour une variable aléatoire continue, la probabilité associée à l'évènement $\{X = a\}$ est nulle, car il est impossible d'observer exactement cette valeur.
On considère alors la probabilité que la variable aléatoire X prenne des valeurs comprises dans un intervalle $[a,b]$ tel que $P(a \leq X \leq b)$.

Lorsque cet intervalle tend vers 0, la valeur prise par X tend alors vers une fonction que l'on appelle **fonction densité de probabilité** ou **densité de probabilité**.

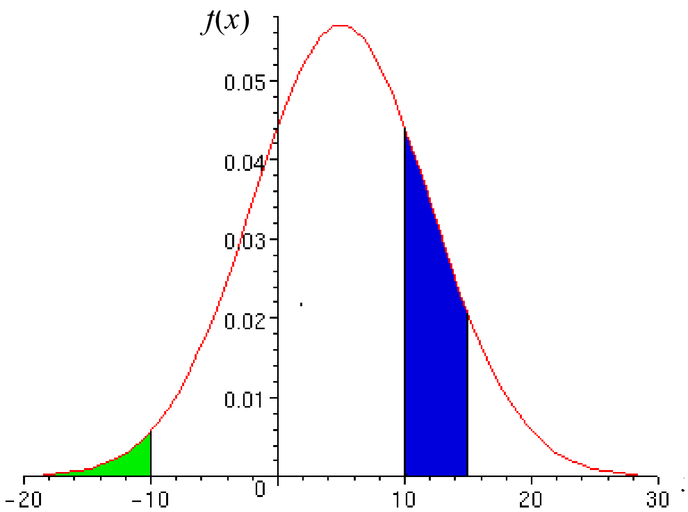
On appelle **densité de probabilité** toute application continue par morceaux :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x)$$

telle que :

(P_1) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq 0$

(P_2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ (en supposant que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ existe)



Soit une **fonction densité de probabilité** $f(x)$:

(1) l'aire hachurée **en vert** correspond à la probabilité

$$P(X < -10)$$

(2) l'aire hachurée **en bleu** correspond à la probabilité

$$P(+10 < X < +15)$$

Remarque : Cette fonction densité de probabilité est une loi de probabilité car l'aire sous la courbe est égale à 1 pour toutes les valeurs de x définies.

Réciproquement :

Une variable aléatoire X définie sur un univers Ω est dite **absolument continue**, s'il existe une **fonction densité de probabilité** f telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad P(X < t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$

(voir graphe ci-dessus).

3.3. Fonction de répartition

Si comme pour les variables aléatoires discrètes, on définit la **fonction de répartition** de X par :

$$\boxed{\begin{array}{l} F_X : \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \qquad\quad t \mapsto F_X(t) = P(X < t) \end{array}}$$

alors la relation entre la **fonction de répartition** F_X et la fonction **densité de probabilité** $\boldsymbol{f(x)}$ est la suivante :

$$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R} \quad F_X(t) = P(X < t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx}$$

La fonction de répartition $F_X(t)$ est **la primitive** (voir cours d'analyse) de la fonction densité de probabilité $f(x)$, et permet d'obtenir les probabilités associées à la variable aléatoire X, en effet :

Soit X une **variable aléatoire absolument continue** de densité f et de fonction de répartition F_X, alors :

(P$_1$) $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(x)dx$ avec $a < b$

(P$_2$) $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $P(x = a) = 0$ si f est continue à droite du point a.

Voici pourquoi :

(P$_1$) $P(a \leq X \leq b) = P(X < b) - P(X < a) = F_X(b) - F_X(a)$

d'où $\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$

(P$_2$) Si f est continue sur un intervalle de la forme $[a, a+h]$ avec $h \to 0^+$ alors,

$P(a \leq X \leq a+h) = \int_a^{a+h} f(x)\, dx = h\, f(a+\theta h)$ avec $(0 < \theta < 1)$

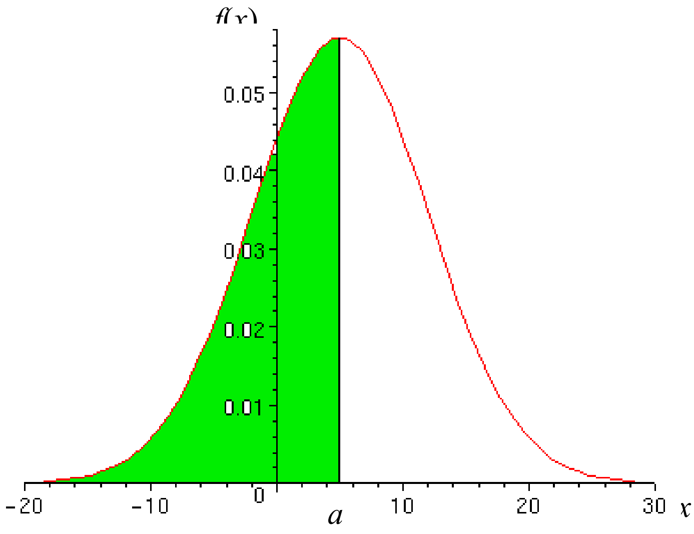
(théorème des accroissements finis)

Ainsi lorsque h $\to 0^+$: $f(a+\theta h) \to f(a)$ et $h\, f(a+\theta h) \to 0$

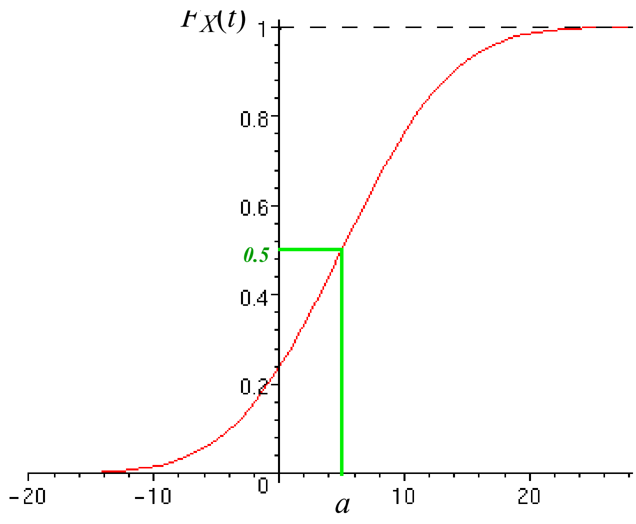
d'où $P(a \leq X \leq a+h) \to P(X = a) = 0$

Remarque : La propriété P$_2$ implique que $P(X \leq t) = P(X < t)$.

La **fonction de répartition** correspond aux *probabilités cumulées* associées à la variable aléatoire continue sur l'intervalle d'étude (graphe ci-dessous).



Fonction densité de probabilité $f(x)$



Fonction de répartition F_X

L'aire **hachurée en vert** sous la courbe de la fonction densité de probabilité correspond à la probabilité $P(X < a)$ et vaut **0,5** car ceci correspond exactement à la moitié de l'aire totale sous la courbe. Cette probabilité correspond à la valeur de la fonction de répartition au **point** d'**inflexion de la courbe** (voir cours analyse).

Les ***propriétés*** associées à la fonction de répartition sont les suivantes :

Soit F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire **absolument continue** X alors :

(P_1) F_X est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en tout point où f est continue et alors $F_X' = f$

(P_2) F_X est croissante sur $\mathbb{R}$

(P_3) F_X est à valeurs dans $[0,1]$

(P_4) $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$

Voici pourquoi :

(P_1) résulte de la relation suivante $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$

(P_2) $F_X' = f$ est donc positive sur $\mathbb{R}$

(P_3) Evident

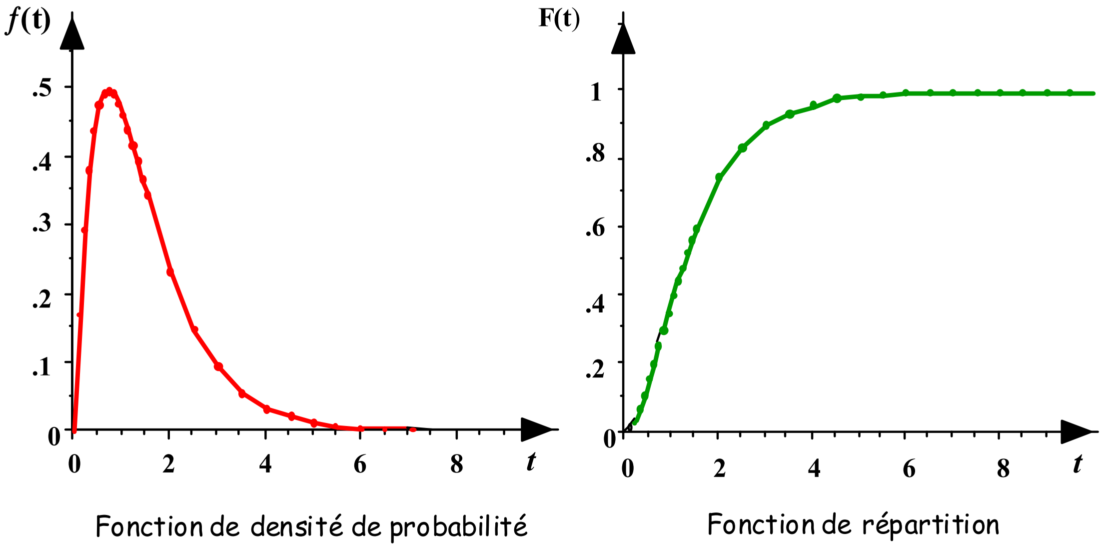
(P_4) $\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$ tend vers 0 quand $t \to -\infty$

Exemple :

Dans une population de **canards colverts**, lors d'une alerte, l'ensemble des individus quittent leur lieu de repos. Ainsi à $t = 0$, la surface de l'étang est déserte et la probabilité qu'un canard regagne l'étang entre les temps t_1 et t_2 (en minutes) est donnée par :

$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$ avec $f(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}$ qui représente la fonction **densité de probabilité**.

La primitive de $f(t)$, $F_T(t)$, **fonction de répartition** est de la forme :



L'évolution de la recolonisation de l'étang par les *canards colverts* en fonction du temps est donnée par la **courbe rouge**. On observe ainsi que plus de 50 % des canards se posent sur l'étang au cours des 2 premières minutes qui suivent l'alerte. Au bout de 7 minutes, tous les canards ont regagné l'étang. La distribution des probabilités cumulées est donnée sur la **courbe verte.**

4. Espérance et Variance

Une loi de probabilité peut être caractérisée par certaines valeurs typiques correspondant aux notions de **valeur centrale**, de **dispersion** et de **forme de distribution**.

4.1. Espérance mathématique

L'**espérance** d'une variable aléatoire *E(X)* correspond à la moyenne des valeurs possibles de *X* pondérées par les probabilités associées à ces valeurs. C'est un paramètre de position qui correspond au **moment** d'ordre 1 de la variable aléatoire *X*. C'est l'équivalent de la **moyenne**

arithmétique $\overline{X}$. En effet lorsque le nombre d'épreuves n est grand, $\overline{X}$ tend vers $E(X)$ (voir **estimation**).

4.1.1. Variables aléatoires discrètes

Si X est une **variable aléatoire discrète** définie sur un univers probabilisé Ω, on appelle espérance de X, le réel défini par : $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega)$

Remarque : Si $X(\Omega)$ est infini, on n'est pas sûr que l'espérance existe. L'espérance mathématique est également notée $\mu(X)$, μ_X ou encore μ si aucune confusion n'est à craindre.

Nous pouvons donner une autre définition de l'espérance d'une **variable aléatoire discrète** X si à $\omega \in \Omega$, on associe l'image x telle que $X(\omega) = x$.

Théorème :
Si X est une **variable aléatoire discrète** de loi de probabilité $(x_i, p_i)_i$ définit sur un nombre fini (n) d'évènements élémentaires alors :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Exemples :

Si l'on reprend l'exemple d'une **fratrie de deux enfants**, l'espérance de la variable aléatoire « nombre de filles « est :

$E(X) = 0 * 1/4 + 1* 1/2 + 2*1/4 = 1$ d'où $E(X) = 1$

Si l'on observe un nombre suffisant de fratries de 2 enfants, on attend **en moyenne *une fille*** par fratrie.

4.1.2. Variables aléatoires continues

Si X est une **variable aléatoire absolument continue** de densité f, on appelle **espérance** de X, le réel $E(X)$, défini par : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$

si cette intégrale est **convergente**.

Exemple :

Si on reprend l'exemple de la recolonisation de l'étang par les **canards colverts**, la durée moyenne pour la recolonisation est :

$E(T) = \int_0^{+\infty} t f(t)dt = \int_0^{+\infty} t(2e^{-t} - 2e^{-2t})dt = \mathbf{3/2}$ (voir **Résultat**)

Sous ce modèle, la **durée moyenne de recolonisation** pour l'ensemble de la population de canards colverts est de **1,5 minutes.**

Remarque : Dans cet exemple, la variable étudiée t ne peut prendre que des valeurs dans $[0, +\infty[$

4.1.3. *Propriétés de l'espérance*

Les propriétés de **l'espérance** valent aussi bien pour une variable aléatoire discrète ou une variable aléatoire absolument continue.

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, admettant une espérance, alors :

(P1) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

(P2) $E(aX)=aE(X) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(P3) Si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$

(P4) Si X est un caractère constant tel que : $\forall \omega \in \Omega \quad X(\omega) = k$ alors $E(X) = k$

Remarque : Dans le cas continu, $E(X+Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x+y) f(xy)dxdy$. La propriété P_1 est vérifiée quelques soient les relations de dépendance ou d'indépendance statistique entre les deux variables.

Voici pourquoi :

Nous démontrerons les propriétés dans le cas de deux variables aléatoires discrètes avec p_i, la probabilité de réalisation de $\{X = x_i\}$ et $\{Y = y_i\}$ et n évènements élémentaires.

(P1) $E(X+Y) = \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{i=1}^{n} y_i p_i = E(X) + E(Y)$

(P2) $E(aX) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i)p_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = aE(X)$

(P3) $X \geq 0$ implique que $\forall \omega \in \Omega \quad X(\omega) \geq 0$ et comme une **probabilité est toujours positive**, $E(X) \geq 0$.

(P4) $E(X) = \sum_{i=1}^{n} kp_i = k\sum_{i=1}^{n} p_i = k$ car par définition $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Nous verrons les applications directes de ces propriétés dans le cadre des **opérations sur les variables aléatoires.**

4.2. Variance

La **variance** d'une variable aléatoire $V(X)$ est l'espérance mathématique du carré de l'écart à l'espérance mathématique. C'est un paramètre de dispersion qui correspond au **moment centré** d'ordre 2 de la variable aléatoire X. C'est l'équivalent de la **variance observée** S^2. En effet lorsque le nombre d'épreuves n est grand, S^2 tend vers $V(X)$ (voir **estimation**).

Si X est une variable aléatoire ayant une espérance $E(X)$, on appelle **variance** de X le réel : $V(X) = E([X - E(X)]^2)$

Autre notation : $V(X) = E([X - E(X)]^2)$

$V(X) = E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2)$

$V(X) = E(X^2) - 2E[XE(X)] + E[E(X)^2]$ Propriétés P_1 de l'**espérance**

$V(X) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$ Propriétés P_4 de l'**espérance**

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

Remarque : Si $X(\Omega)$ est infini, il n'est nullement évident que $V(X)$ existe. De plus comme $[X - E(X)]^2 \geq 0$ nécessairement $V(X) \geq 0$. Par définition, une **variance est toujours positive**.
La variance est également notée σ^2 si aucune confusion n'est à craindre.

Si X est une variable aléatoire ayant une variance $V(X)$, on appelle **écart-type** de X,

le réel : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque : L'écart-type permet de disposer d'un paramètre de dispersion qui s'exprime dans les **mêmes unités** que la variable aléatoire elle-même.
Le terme « écart-type » se traduit en anglais par le faux-ami « standard deviation ».

4.2.1. Variables aléatoires discrètes

Si X est une variable aléatoire **discrète** de loi de probabilité $(x_i, p_i)_i$ définie sur un nombre fini (n) d'évènements élémentaires alors la variance est égale à :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - E(X)^2$$

Exemple :

Si l'on reprend l'exemple d'une **fratrie de deux enfants**, la variance de la variable aléatoire « nombre de filles « est :

$V(X) = 1/4\ (0-1)^2 + 1/2\ (1-1)^2 + 1/4\ (2-1)^2 = 1/2$

$V(X) =$ **1/2** et $\sigma(X) =$ **0,7**

4.2.2. Variables aléatoires continues

Si X est une variable aléatoire **continue** donnée par sa densité de probabilité alors la variance de X est le nombre réel positif tel que :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - E(X)^2$$

Exemple :

Dans le cadre de la recolonisation de l'étang par la population de canard colvert, la variance de la loi de probabilité est :

$V(T) = \int_0^{+\infty} (t - E(T))^2 f(t)dt =$ **5/4** avec $\sigma =$ **1,12** (voir **Résultat**)

4.2.3. Propriétés de la variance

Si X est une variable aléatoire admettant une variance alors :

(P1) $\forall\ a \in \mathbb{R},\quad V(aX) = a^2\ V(X)$

(P2) $\forall\ (a, b) \in \mathbb{R},\quad V(aX + b) = a^2\ V(X)$

(P3) $V(X) = 0 \quad \Leftrightarrow X = E(X)$

Il est possible d'exprimer la variance en fonction du **moment** d'ordre 1 (m_1) et du moment d'ordre 2 (m_2). La variance correspond au **moment centré** d'ordre 2.

$V(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - E(X)^2$ **Démonstration**

d'où $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = m_2 - m_1^2$

5. Couples de variables aléatoires

5.1. Loi jointe

Les définitions portant sur **la loi jointe** entre deux variables aléatoires X et Y impliquent que ces dernières soient définies sur **le même** **espace fondamental** Ω. Si X et Y sont définies respectivement sur les espaces fondamentaux Ω_1 et Ω_2, alors il faut envisager un espace qui englobe Ω_1 et Ω_2 appelé « **espace-produit** ».

Il suffit alors de connaître l**a loi jointe** des deux variables aléatoires ou **loi de probabilité du couple** (X,Y),la fonction définie par :

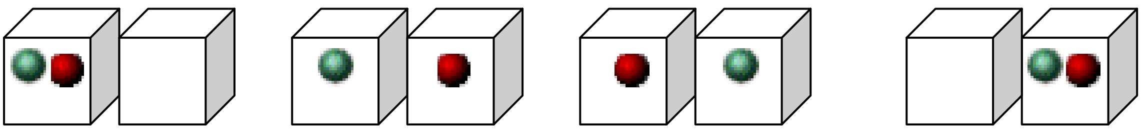
$$x,y \rightarrow p_{xy} = P\,((X = x) \text{ et } (Y = y)) \quad \text{dans le cas } \textbf{discret}$$

Dans le cas **continu,** $p_{xy} = P\,((x_a < X < x_b) \text{ et } (y_c < Y < y_d))$ permet de définir la probabilité pour que (X,Y) soit dans un rectangle.

Remarque : Ceci peut être généralisé à un nombre quelconque de variables aléatoires.

Exemple :

On place au hasard deux billes rouge et verte dans deux boites A et B. On note X, la variable aléatoire « nombre de billes dans la boite A » et Y, la variable aléatoire « nombre de boites vides ».



A B A B A B A B

Les **distributions de probabilités** associées à chacune des variables X et Y ainsi que celle de la **loi jointe** sont indiquées ci-dessous. Pour chaque loi, la valeur de l'espérance et de la variance est également indiquée.

Variable X : $X(\Omega) = \{0,1,2\}$

$E(X) = 1$ $V(X) = 1/2$

x_i	0	1	2
p_i	1/4	1/2	1/4

Variable Y : $Y(\Omega) = \{0,1\}$

$E(Y) = 1/2$ $V(Y) = 1/4$

y_j	0	1
q_j	1/2	1/2

Variable XY : $XY(\Omega) = \{0,1,2\}$

$E(XY) = 1/2$ $V(XY) = 3/4$

$x_i\, y_j$	0	1	2
ρ_{ij}	3/4	0	1/4

5.2. Indépendance entre variables aléatoires

Les propriétés concernant l'**indépendance statistique** entre deux variables aléatoires s'appliquent aussi bien aux variables aléatoires discrètes ou absolument continues.

> *Théorème :*
> Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur le même univers Ω alors : $E(XY) = E(X)E(Y)$

Remarque : L'application réciproque n'est pas vraie. La relation $E(XY) = E(X)E(Y)$ n'implique pas forcément l'indépendance de deux variables aléatoires.

Exemple :

Dans l'exemple concernant la répartition des **deux billes dans les 2 boites**, la relation $E(XY) = E(X)E(Y)$ est vérifiée car : $E(X) = 1$; $E(Y) = 1/2$ et $E(XY) = 1/2$
cependant les variables aléatoires X et Y **ne sont pas indépendantes**.

En effet $\rho_{00} = P\,((X = 0) \cap (Y = 0)) = 0$ car il est impossible d'avoir à la fois aucune bille dans la boite A et aucune boite vide. Or on attend si X et Y sont deux variables **statistiquement indépendantes**, à ce que
$P\,((X = 0) \cap (Y = 0)) = P(X = 0)P(Y = 0) = 1/4*1/2 = \mathbf{1/8 \neq 0}$

> *Théorème :*
> Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur le même univers Ω alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ **Démonstration**

Remarque : L'application réciproque n'est pas vraie. La relation $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ n'implique pas forcément l'indépendance de deux variables.

Exemple :
Si l'on reprend l'exemple de la répartition de **deux billes dans deux boites**, la distribution de probabilité de la variable aléatoire $(X+Y)$ est :

Variable $X+Y$: $X+Y(\Omega)=\{0,1,2,3\}$

$E(X+Y)=3/2$ $V(X+Y)=3/4$

x_i+y_j	0	1	2	3
p_{ij}	0	3/4	0	1/4

Comme $V(X) = 1/2$ et $V(Y) = 1/4$ alors $V(X) + V(Y) = 3/4 = V(X+Y)$

On retrouve ainsi la relation $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ bien que X et Y **ne soient pas indépendantes** (voir **démontration**).

5.3. Covariance et Corrélation

Lorsque l'on considère deux variables aléatoires simultanément, il faut définir un indicateur de leur « **liaison** » qui complète les paramètres qui les caractérisent chacune séparément (espérance mathématique et variance).

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω, on appelle **covariance** de ces deux variables, le réel :

$$\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

et **coefficient de corrélation**, le réel :

$$R(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Il résulte de cette définition, le théorème suivant :

Théorème :
Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω
et **indépendantes**, alors : $\text{cov}(X,Y) = 0$

Les propriétés de la **covariance** sont les suivantes :
Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, alors :

(P_1) $\forall(a,b) \in \mathbb{R}$ $V(aX + bY) = a^2V(X) + 2ab\,cov(X,Y) + b^2V(Y)$ }

(P_2) $[cov(X,Y)]^2 \leq V(X)\,V(Y)$

$|cov(X,Y)| \leq \sigma(X)\,\sigma(Y)$

(P_3) $-1 \leq R(X,Y) \leq 1$

Remarque : Si X et Y sont indépendantes, $\rho=0$ mais la réciproque est fausse. Il peut arriver, par hasard, que $\rho=0$ sans que X et Y soient indépendantes.

5.4. Opérations sur les variables aléatoires

Il arrive souvent que l'on effectue **des transformations** sur les variables aléatoires par commodité de calcul et il est important de savoir comment se comportent les paramètres associés à cette variable.
Nous avons résumé dans le tableau ci-dessous quelques transformations possibles avec a et $b \in \mathbb{R}$.

Translation de l'origine seule $X \to X + b$	Changement d'unités seul $X \to aX$	Cas général $X \to aX + b$
$E(X+b) = E(X) + b$ $V(X+b) = V(X)$	$E(aX) = aE(X)$ $V(aX) = a^2\,V(X)$	$E(aX+b) = aE(X) + b$ $V(aX+b) = a^2\,V(X)$

Il existe d'autres transformations de variables aléatoires qui conduisent à des valeurs de paramètres particulières.

> Une variable aléatoire X est dite **centrée** si $E(X) = 0$.

Exemple :

La variable $Y = X - E(X)$ est une **variable aléatoire centrée** car

$E(Y) = E[X - E(X)] = E(X) - E(E(X))$

or $E(E(X)) = E(X)$ voir **propriétés** P_4 de l'espérance

ainsi $E(Y) = E(X) - E(X) = 0$

> Une variable aléatoire admettant une variance est dite **réduite** si $V(X) = 1$.

Exemple :

La variable $Y = \dfrac{X}{\sqrt{V(X)}}$ est une **variable aléatoire réduite** car

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = E\left[\left(\frac{X}{\sqrt{V(X)}}\right)^2\right] - \left[E\left(\frac{X}{\sqrt{V(X)}}\right)\right]^2$$

$$V(Y) = \frac{1}{V(X)} E(X^2) - \left[\frac{1}{\sqrt{V(X)}} E(X)\right]^2$$ voir **propriétés** P_2 de l'espérance

$$V(Y) = \frac{1}{V(X)}[E(X^2) - E(X)^2] \qquad \text{d'où } V(Y) = \frac{V(X)}{V(X)} = 1$$

A toute variable aléatoire X d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$ on peut associer la variable aléatoire $\frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$ dite variable aléatoire **centrée réduite** et dont l'emploi est indispensable pour utiliser la plupart des tables notamment les **tables de la loi normale réduite.**

5.5. Généralisation à n variables aléatoires

Si l'on considère une épreuve à laquelle est associée un espace fondamental Ω et une variable aléatoire X et si l'on répète n fois, de façon indépendante cette épreuve, on obtient une suite $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ variables aléatoires qui sont :

- définies sur le même espace fondamental
- de même loi de probabilité
- indépendantes

alors : $E(X_1 + X_2 + \ldots + X_i + \ldots X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ (Propriété P_1 de l'**espérance** que les v.a. soient indépendantes ou non)

$V(X_1 + X_2 + \ldots + X_i + \ldots X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$ (Propriété de la variance dans le cas d'**indépendance** des v.a.)